CHAPITRE 1 : CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

L'électrostatique est la partie de l'électricité qui permet de décrire les effets de charges électriques statiques (immobiles les unes par rapport aux autres).

En électrostatique, les effets électriques générés par un corps chargé peuvent être décrits par 2 grandeurs mathématiques :

- **le champ électrostatique qui est un champ de vecteurs**
- **le potentiel électrostatique qui est un champ de scalaires**

La connaissance de ces deux grandeurs en tout point de l'espace permet de décrire toutes les perturbations électriques induites par le corps chargé dans son environnement et donc les actions subies par les charges avoisinantes.

1. Loi de Coulomb – Champ électrostatique

1.1. Charges électriques

1.1.1. Notion de charges électriques

Tous les corps sont électrisables. L'électrisation peut être obtenue par différents procédés : échauffement, frottement, contact etc.

La charge électrique est une grandeur scalaire intrinsèque additive et conservative qui caractérise le comportement de la matière vis-à-vis de l'interaction électromagnétique. La charge algébrique totale d'un système isolé (électriquement) se conserve donc au cours du temps (loi de conservation de charge).

La charge électrique q d'un corps mesure la quantité d'électricité qu'il porte et est exprimé en coulomb (C) en unité du système international (S.I.).

Il existe deux espèces de charges électriques : la charge positive et la charge négative. Deux corps portant le même type de charges électriques se repoussent. Deux corps portant des charges électriques de types différents s'attirent. Dans un corps, l'électron est considéré comme un grain d'électricité négative de charge -e et le proton un grain d'électricité positive de charge e. e est la charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C. L'expérience montre que la charge électrique d'un corps est un multiple entier de la charge élémentaire. Elle est donc quantifiée.

1.1.2. Modèle de charges ponctuelles

Une charge ponctuelle est une charge électrique suffisamment petite pour être localisée en un point de l'espace. Son extension spatiale est donc négligeable devant les distances entre particules. Ce modèle de charges ponctuelles est valable tant que les distances entre particules sont grandes par rapport aux dimensions de la charge.

La charge électrique Q d'un corps du point de vue macroscopique ou mésoscopique comporte un nombre important de charges élémentaires : $\boldsymbol{Q = Ne}$.

1.2. Loi de Coulomb

La loi de Coulomb (établi expérimentalement par Charles-Augustin Coulomb en 1785) permet d'exprimer la force électrique exercée entre 2 charges ponctuelles en fonction de la valeur des charges et de la distance qui les sépare.

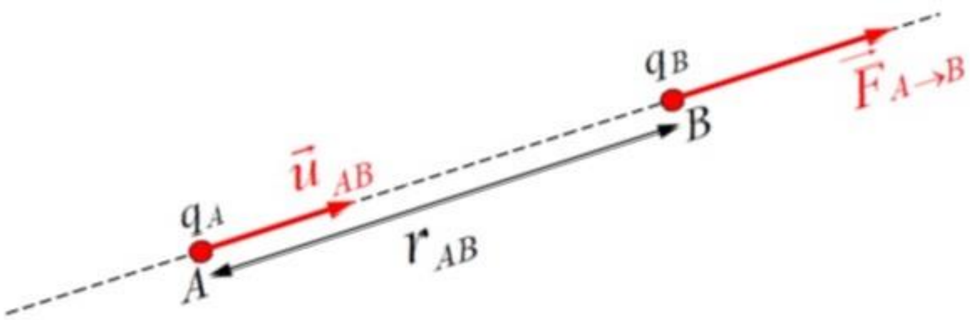
1.2.1. Enoncé de la loi Coulomb

La force électrostatique entre 2 charges électriques ponctuelles est proportionnelle à la valeur des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette interaction est portée par la droite qui joint les 2 charges.

1.2.2. Formulation mathématique

La loi de Coulomb exprimant que l'interaction électrostatique étant une interaction à force centrale décroissante en $1/r^2$ où r est la distance entre les deux charges électriques en interaction est une interaction newtonienne.

Considérons 2 charges ponctuelles q_A et q_B placées respectivement en 2 points A et B.



La norme de la force électrostatique $F_{A\to B}$ exercée par la charge ponctuelle en A sur celle située en B s'écrit (loi de Coulomb) :

$$\boldsymbol{F_{A\to B} = K\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}}$$

En termes vectoriels la loi de Coulomb s'écrit donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{F}_{A\to B} = K\frac{q_A q_B}{r_{AB}^2}\vec{u}_{AB} = K\frac{q_A q_B}{r_{AB}^3}\overrightarrow{AB}}}$$

- $r_{AB} = AB$: distance entre les charges ponctuelles q_A et q_B
- $\vec{u}_{AB}$: vecteur unitaire suivant AB et dirigée de A (qui exerce la force) vers B (qui subit la force).

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{r_{AB}}$$

- K est la constante de proportionnalité. Elle dépend des unités choisies et de la matière du milieu dans lequel sont situées les charges électriques :
  - ✓ Si les charges sont dans le vide on a :

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

où ε_0 est la permittivité diélectrique du vide.

En unité S.I. $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi}10^{-9} \approx 8{,}854188\ 10^{-12}$ F.m^{-1} et K = 9 10^9 Nm^{2}C^{-2}

  - ✓ Si les charges sont dans un milieu caractérisé par sa permittivité absolue ε, la nouvelle constante K est obtenue en changeant ε_0 par ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} > 1$$

où ε_r est la permittivité relative du milieu.

- ➢ Si les deux charges sont de même signe, le produit $q_A q_B > 0$. La force $\vec{F}_{A\to B}$ a le même sens que $\vec{u}_{AB}$ et correspond à une force répulsive (A repousse B).
- ➢ Si les deux charges sont de signe contraire, le produit $q_A q_B < 0$. La force $\vec{F}_{A\to B}$ est donc opposée à $\vec{u}_{AB}$ et est attractive (attraction de B vers A).

Remarque: D'après la loi des actions réciproques la charge q_B exerce sur la charge q_A la force:

$$\vec{F}_{B\to A} = K\frac{q_A q_B}{r_{AB}^3}\overrightarrow{BA} = -\vec{F}_{A\to B}$$

1.3. Champ électrostatique d'une charge ponctuelle

1.3.1. Définition

Considérons une charge ponctuelle fixe Q placée en un point O de l'espace. Le champ électrostatique produit par la charge Q est un champ de vecteur exprimant l'action que subit une autre charge électrique ponctuelle Q' placée en un point M de la part de la charge Q dans son environnement. Il est donc définit et évalué à partir de la force électrostatique $\vec{F}_{O\to M}$ exercée par la charge Q sur la charge Q' par :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\vec{F}_{O\to M}}{Q'}}$$

d'où

$$\vec{F}_{O\to M} = Q'\vec{E}(M)$$

La charge qui produit le champ électrostatique est la charge source ou charge active.

La charge qui sert à détecter le champ est la charge test ou charge d'épreuve ou charge passive.

1.3.2. Champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

Dans le vide, la force électrostatique exercée par la charge Q placée en O sur la charge Q' placée en M est :

$$\vec{F}_{O\to M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{QQ'}{OM^3}\overrightarrow{OM} = Q'\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3}\right)$$

d'où le champ électrostatique crée par la charge ponctuelle Q placé au pont O en un point M de l'espace est :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{OM}}{r_{OM}^2}}$$

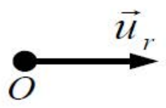
- **Loi fondamentale de l'électrostatique**

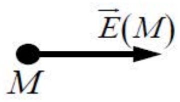
Le champ électrostatique crée par une charge ponctuelle Q en un point M situé à une distance r de Q a pour expression :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_r}{r^2}}$$

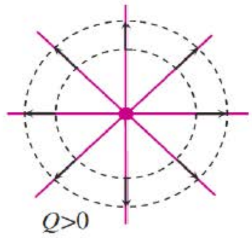
avec $\vec{r} = r\vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$: vecteur unitaire dans la direction de $\vec{r}$)

✓ $Q > 0$ on a :

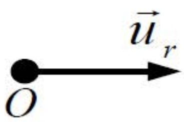


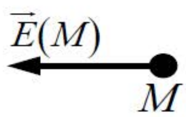


Le champ $\vec{E}(M)$ est divergent

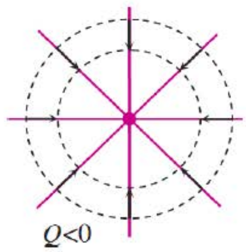


✓ $Q < 0$ on a :





Le champ $\vec{E}(M)$ est convergent



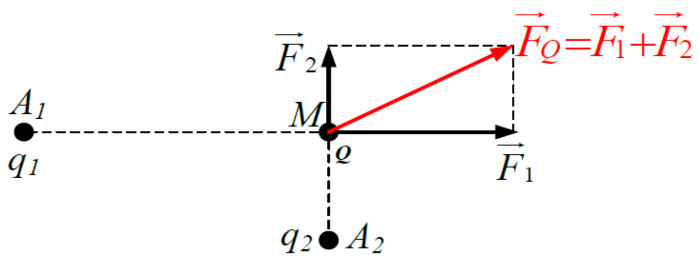
1.4. Champ électrostatique créé par un ensemble de charges ponctuelles

1.4.1. Principe de superposition

Pour un système de N charges ponctuelles $\{q_i\}_{i=1,N}$ placées en des points $\{A_i\}_{i=1,N}$, l'interaction entre deux charges du système est indépendante de la présence des autres charges. Ainsi la résultante $\vec{F}_j$ des forces électrostatiques sur une charge q_j quelconque du système est la somme vectorielle des forces individuelles exercées par chaque charge q_i ($i \neq$ j) :

$$\boxed{\vec{F}_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \vec{F}_{A_i \to A_j} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N} \frac{q_j q_i}{(A_i A_j)^3}\overrightarrow{A_i A_j}}$$

Exemple : Force subie par une charge Q de la part de deux charges ponctuelles positives :



1.4.2. Champ créé par une répartition discrète de charges ponctuelles

Pour un système de N charges ponctuelles $\{q_i\}_{i=1,N}$ placées respectivement aux points $\{A_i\}_{i=1,N}$, la force électrostatique exercée sur une charge ponctuelle q placée en un point M de l'espace s'écrit d'après le principe de superposition:

$$\vec{F}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i(M) = \sum_{i=1}^{N} q\vec{E}_i(M) = q\sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = q\vec{E}(M)$$

- ✓ $\vec{E}_i(M)$: champ électrostatique crée au point M par la charge q_i placé en A_i
- ✓ $\vec{E}(M)$: champ électrostatique résultant en M

d'où

$$\boxed{\vec{E}(M) = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(M) = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}_i}{r_i^3} = \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{u}_{r_i}}{r_i^2}}$$

avec $\vec{r}_i = \overrightarrow{A_iM} = r_i\vec{u}_{r_i}$; $\vec{u}_{r_i}$: vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{A_iM}$

2. Distributions continues de charges

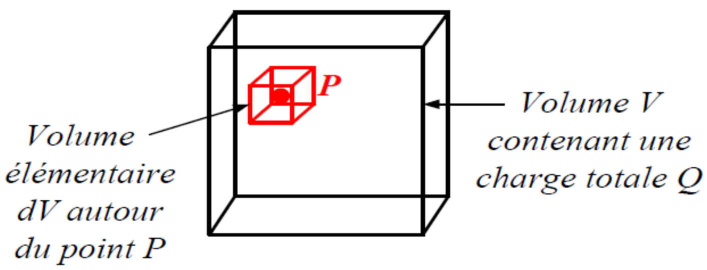
La charge électrique est répartie de manière discontinue au niveau microscopique. Du fait de la faible dimension de la charge élémentaire, on considère qu'à l'échelle macroscopique ou mésoscopique, la répartition de la charge Q se fait de façon continue sur le corps matériel. Cette répartition peut être modélisée par des densités de charges électriques qui dépendent de la géométrie du corps chargé (filiforme, surfacique ou volumique). On distingue 3 types de densité de charges:

- ✓ densité volumique de charges
- ✓ densité surfacique de charges
- ✓ densité linéique de charges.

2.1. Distribution volumique de charges

Les charges (de quantité Q) sont réparties dans un corps matériel de volume (V) et en tout point P du volume (V), on définit une densité volumique de charges (charge par unité de volume) notée ρ(P). On considère alors un volume élémentaire dV autour du point P contenant la charge électrique élémentaire dQ et la densité volumique de charges ρ s'exprime par :

$$\boxed{\rho(P) = \frac{dQ}{dV} \Rightarrow dQ = \rho(P)dV}$$



La charge totale contenue dans tout le volume (V) s'obtient en sommant l'ensemble des charges des volumes élémentaires :

$$Q = \int_{P \epsilon V} dQ = \iiint_V \rho(P) dV$$

Pour une répartition uniforme de la charge Q dans le volume (V), la densité volumique de charge ρ est indépendante du point P et on a :

$$\rho = \frac{Q}{V} = cste$$

ρ s'exprime en $C.m^{-3}$ (en unité S.I.)

- **Expression de dV**

dVs'exprime de différentes façons :

- En coordonnées cartésiennes (répartition parallélépipédique) **:** $dV = dx\, dy\, dz$
- En coordonnées cylindriques (r, θ, z) : $dV = rdr\, d\theta\, dz$
  $\theta \in [0; 2\pi]$
- En coordonnées sphériques (r, θ, φ) : $dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$
  $\theta \in [0; \pi]$
  $\varphi \in [0; 2\pi]$

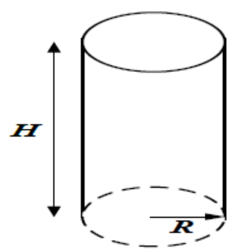
- **Exercice d'application**

1) Soit une sphère de rayon R dont la répartition volumique de charges n'est pas uniforme :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & si\, r \leq R \\ \rho = 0 & si\, r > R \end{cases}$$

Calculer la charge totale de la sphère$R$.

2) Déterminer la charge totale contenue dans un cylindre de rayon R, de hauteur H et de charge volumique:$(\theta) = \rho_0(1 - \cos^2\theta)$.



2.2. Distribution surfacique de charges

Dans ce cas les charges (de quantité Q) sont réparties dans un corps matériel de surface (S). On définit une densité surfacique de charges (charge par unité de surface) notée σ en tout point de la surface.

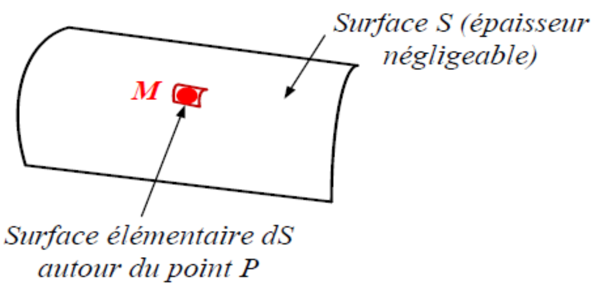
Si la répartition de la charge Q se fait uniformément sur la surface (S) alors:

$$\sigma = \frac{Q}{S} = cste$$

σ s'exprime en $C.m^{-2}$.

Si la répartition n'est pas uniforme, on considère une surface élémentaire dS autour d'un point P quelconque de la surface (S) suffisamment petite pour pouvoir considérer que la charge électrique élémentaire dQ qu'elle contient est répartie uniformément. On peut alors écrire que:

$$\boxed{\sigma(P) = \frac{dQ}{dS} \Longrightarrow dQ = \sigma(P)dS}$$



La charge totale Q portée par la surface chargée S est donnée par la relation :

$$Q = \int_{P\epsilon S} dQ = \iint_{(S)} \sigma(P)dS$$

- **Expression de dS**

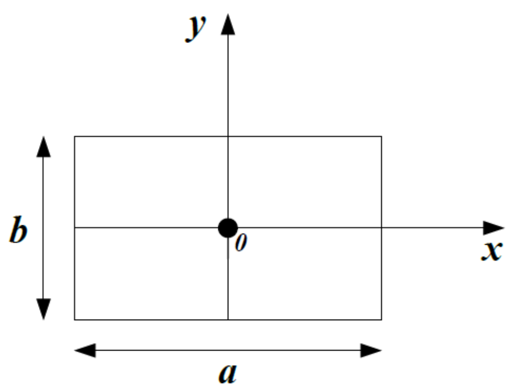
dS s'exprime de différentes façons :

- En coordonnées cartésiennes (sur une surface rectangulaire) : $dS = dx\,dy$
- En coordonnées polaires planes (r, θ) (sur un disque) : $dS = rdr\,d\theta$
- En coordonnées cylindriques (r, θ, z) (sur les parois d'un cylindre) : $dS = rd\theta\,dz$

- **Exercice d'application**

Déterminer la charge totale sur un rectangle de coté a selon x et b selon y centrée à l'origine du repère et de charge surfacique :

$$\sigma(x,y) = \sigma_0 \frac{x^2y^2}{a^2b^2}$$



2.3. Distribution linéique de charges

C'est le cas d'un corps matériel (exemple un fil) de longueur L et de diamètre négligeable chargé par la quantité de charges Q. On définit ici une densité linéique de charges (charge par unité de longueur) notée λ.

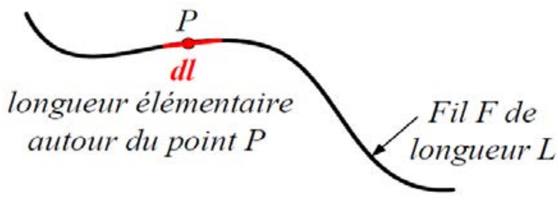
Si cette charge Q est répartie uniformément sur le corps filiforme de longueur L, la densité linéique de charges est définie par :

$$\boldsymbol{\lambda = \frac{Q}{L} = cste}$$

λ s'exprime en $C.m^{-1}$.

Si la répartition n'est pas uniforme, on considère une longueur élémentaire dl autour d'un point P du corps filiforme suffisamment petite pour pouvoir considérer que la charge électrique élémentaire dQ qu'elle contient est répartie uniformément. On écrire alors:

$$\boxed{\boldsymbol{\lambda(P) = \frac{dQ}{dl} \Rightarrow dQ = \lambda(P)dl}}$$



La charge totale Q portée par le fil chargé est donnée par la relation :

$$\boldsymbol{Q = \int_{P\epsilon L} dQ = \int_{(L)} \lambda(P)dl}$$

- **Expression de dl**

dl s'exprime de différentes façons :

➢ En coordonnées cartésiennes (le long d'un axe) **: dl = dx**

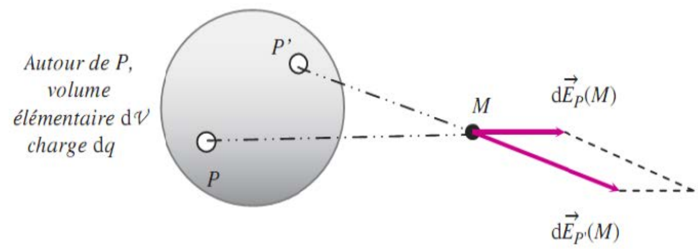
➢ En coordonnées polaires planes (r, θ) (sur un arc de cercle) : **dl = $r\, d\theta$**

$\boldsymbol{\theta \in [0; 2\pi]}$

2.4. Champ électrostatique créé par une distribution continue de charges électriques

2.4.1. Champ créé par une distribution volumique de charges

Soit une distribution de charges D contenue dans un volume V avec une densité volumique de charge ρ(P). La charge $dq = \rho(P)dV$ (considérée ponctuelle) contenue dans le volume élémentaire dV au point P, crée au point M le champ élémentaire $d\vec{E}_P(M)$:



$$d\vec{E}_p(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\rho(P)dV}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dV$$

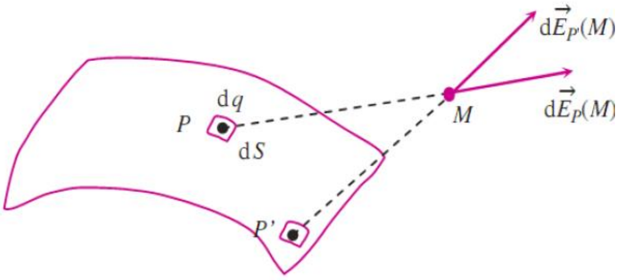
d'où le champ résultant au point M : $\vec{E}(M) = \iiint_V \vec{E}_P(M) \Rightarrow$

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V)} \rho(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V)} \rho(P)\frac{\vec{r}}{r^3}dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(V)} \rho(P)\frac{\vec{u}_r}{r^2}dV$$

où $\vec{r} = \overrightarrow{PM} = r\vec{u}_r$ ($\vec{u}_r$: vecteur unitaire dans la direction de $\overrightarrow{PM}$).

2.4.2. Champ créé par une distribution surfacique de charges

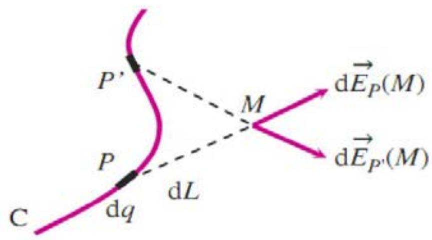
De même pour une distribution surfacique de charges de densité surfacique σ(P) sur une surface d'aire S, le champ élémentaire $d\vec{E}_P(M)$ créé par la charge $dq = \sigma(P)dS$ étant considérée comme ponctuelle le champ résultant au point M est:



$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)} \sigma(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)} \sigma(P)\frac{\vec{r}}{r^3}dS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)} \sigma(P)\frac{\vec{u}_r}{r^2}dS$$

2.4.3. Champ créé par une distribution linéique de charges

Pour une distribution linéique de charges de densité linéique λ(P) sur une longueur L, le champ résultant au point M est donc:



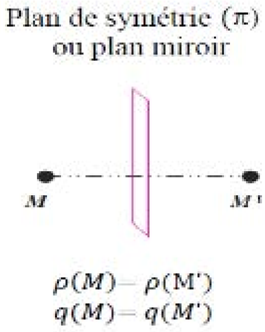
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)} \lambda(P)\frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}dl$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)} \lambda(P)\frac{\vec{r}}{r^3}dl$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)} \lambda(P)\frac{\vec{u}_r}{r^2}dl$$

3. Propriétés de symétrie

En électrostatique, la cartographie du champ reflète la géométrie de la distribution de charges au sein du système. Il est donc indispensable de procéder à une analyse de la symétrie du système de charges avant toute détermination de grandeurs électriques. Les propriétés de symétrie permettent de prévoir la symétrie des champs électrostatiques crées par le système. Les opérations de symétrie concernent les cas où la distribution de charges présente un plan de symétrie, un plan d'antisymétrie, une invariance par translation parallèlement à un axe et une invariance par rotation autour d'un axe.

3.1. Symétries et invariances des distributions de charges

3.1.1. Symétrie plane



Soit un plan (π) et la symétrie S_π par rapport à ce plan. Une distribution de charges D est symétrique par rapport au plan (π) si et seulement si :

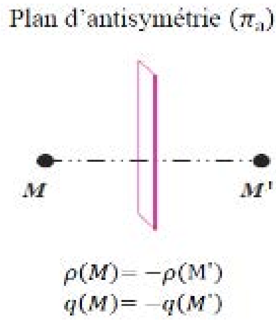
$\forall$ M $\in$ D, M' = S_π(M) $\in$ D et ρ(M') = ρ(M) (Valable pour tout type de distribution).

Pour les charges q(M') = q(M). distribution de charges)

Une transformation par un plan de symétrie laisse inchangée une grandeur scalaire.

- Exemple : La distribution de charges D est symétrique par rapport au plan (xOy) $\Leftrightarrow$ ρ(x,y,-z) = ρ(x,y,z) pour tout point M(x,y,z) et son symétrique M'(x,y,-z) de D.

3.1.2. Antisymétrie plane



Soit un plan (π_a) et la symétrie $S_{\pi a}$ par rapport à ce plan. Une distribution de charges D est antisymétrique par rapport au plan (π_a) si et seulement si :

$\forall$ M $\in$ D, M' = $S_{\pi a}$(M) $\in$ D et $\rho(M') = -\rho(M)$

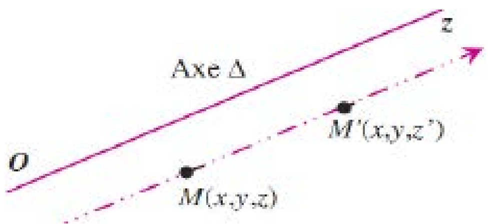
Pour les charges : $q(M') = -q(M)$

Une transformation par un plan d'antisymétrie change une grandeur scalaire en son opposé.

- Exemple1 : La distribution de charges D est antisymétrique par rapport au plan (xOy) $\Leftrightarrow$ $\rho(x, y, -z) = -\rho(x, y, z)$ pour tout point M(x,y,z) et son symétrique M'(x,y,-z) de D.
- Exemple 2 : La distribution de charges constituées de deux petites sphères chargées, l'une avec la charge +Q, l'autre avec la charge −Q admet le plan médiateur des deux sphères comme plan d'antisymétrie.

3.1.3. Invariance par translation

Il y a invariance par translation parallèlement à un axe Δ si la densité de charges reste inchangée lorsqu'on passe d'un point M à un point M' translaté de M parallèlement à l'axe Δ.



La distribution de charges D est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ si et seulement si:

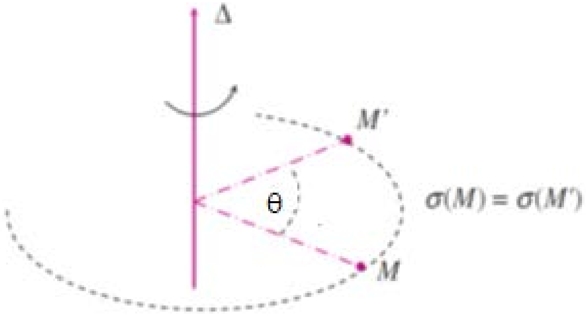
$$\forall\, M \in D, M' = \mathcal{T}_{\vec{a}}(M) \in D \text{ et } \rho(M') = \rho(M)$$

- Exemple, distribution de charge D invariante par la translation de vecteur $\vec{a} = a\vec{u}_x$ $(a \in \mathbb{R}) \Leftrightarrow$ ρ(x,y,z) = ρ(x+a,y,z) $\forall$ M(x,y,z) et M'(x + a,y,z) $\in$ D.

Si une distribution de charges est invariante par toute translation de vecteur parallèle à l'axe (Ox) alors la densité de charge ne dépend pas de x.

3.1.4. Invariance par rotation

Il y a invariance par rotation d'angle θ_0 autour d'un axe Δ si cette rotation amène le point M à un point M' en laissant la densité de charges inchangée.



La distribution de charges D est donc invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'angle θ_0 autour de l'axe Δ si et seulement si :

$$\forall\, M \in D, M' = \mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}(M) \in D \text{ et } \rho(M') = \rho(M)$$

La distribution de charges possède alors la symétrie de révolution d'axe Δ (axe de symétrie).

- Exemple, la distribution de charges D est invariante par la rotation d'angle θ_0 autour de l'axe (Oz) si et seulement si $\forall$ M(r,θ,z) ∈ D, M′(r,θ+θ_0,z) ∈ D et
  ρ(r,θ,z) = ρ(r,θ +θ_0,z).

Si une distribution de charge est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) (symétrie de révolution d'axe (Oz)), alors ρ (M) ne dépend pas de θ.

3.1.5. Exemples des symétries cylindrique et sphérique

a) Symétrie cylindrique

Une distribution de charges à symétrie cylindrique d'axe (Oz) est invariante par toute translation de vecteur parallèle à (Oz) et par toute rotation autour de (Oz). En coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe (Oz), la densité de charge est indépendante de θ et de z: ρ(M) = ρ(r).

b) Symétrie sphérique

Une répartition de charges à symétrie sphérique de centre O est invariante par toute rotation autour de n'importe quel axe passant par O. En coordonnées sphériques (r,θ,φ) de centre O, la densité de charge est indépendante de θ et φ : ρ(M) = ρ(r).

3.2. Symétries et invariances du champ électrostatique

3.2.1. Principe de Curie

La symétrie des causes se retrouve dans les effets produits. (La réciproque n'est pas toujours vraie). C'est un principe général.

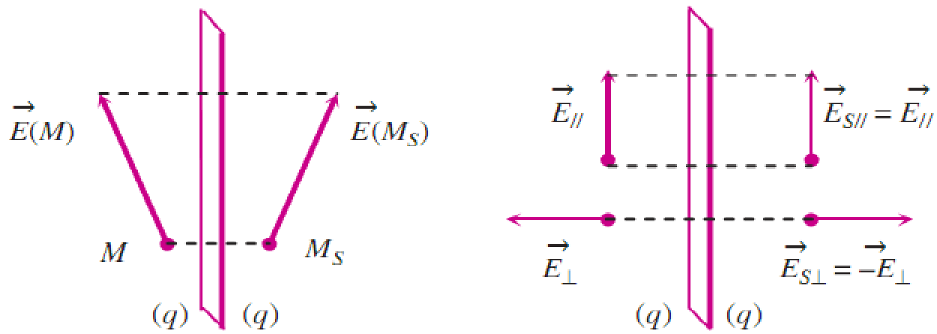
Application au cas de l'électrostatique : la symétrie des distributions de charges se retrouvent dans le champ électrostatique créé.

3.2.2. Opérations de symétrie

a) Symétrie plane

Le vecteur champ électrostatique se transforme comme pour une symétrie plane (comme dans un miroir).

Plan de symétrie (π)



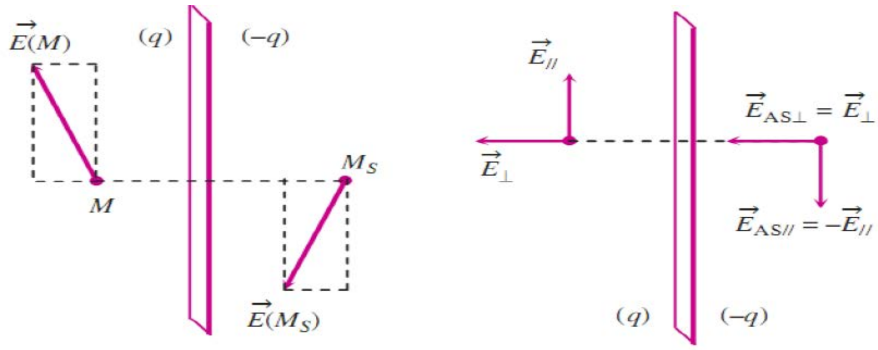
Soit la symétrie S_π par rapport à un plan (π) et $\vec{S}_\pi$ la symétrie vectorielle associée à la symétrie affine S_π. Si une distribution de charges D admet le plan (π) comme plan de symétrie alors pour tout point M et M' = S_π(M), $\vec{E}(M') = \vec{S}_\pi\left(\vec{E}(M)\right)$.

Donc

- Un plan de symétrie pour la distribution de charges :
  - ✓ laisse invariante la composante parallèle au plan du vecteur champ électrostatique
  - ✓ transforme la composante normale au plan du vecteur champ électrostatique en son opposé
- Si M appartient au plan de symétrie, il se confond avec son symétrique M' et la composante normale au plan est ainsi nulle. Le vecteur champ électrostatique est donc dans le plan de symétrie.

b) Antisymétrie plane

Plan d'antisymétrie (π)



Soit la symétrie $S_{\pi a}$ par rapport à un plan (π_a) et $\vec{S}_{\pi a}$ sa symétrie vectorielle associée.

Si une distribution de charges D admet le plan (π_a) comme plan d'antisymétrie alors pour tout point M et M' = $S_{\pi a}$(M), $\vec{E}(M') = -\vec{S}_{\pi a}\left(\vec{E}(M)\right)$

Donc

- Un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges :
  - ✓ transforme la composante parallèle au plan du vecteur champ électrostatique en son opposé
  - ✓ laisse invariante la composante normale au plan du vecteur champ électrostatique
- Si M appartient au plan d'antisymétrie, il se confond avec son symétrique. La composante parallèle au plan est alors nulle et le vecteur champ électrostatique est orthogonal au plan d'antisymétrie.

3.2.3. Invariances du champ électrostatique

a) Invariance par translation

Si une distribution de charges est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ alors pour tout point M et M' = $\mathcal{T}_{\vec{a}}$(M), $\vec{E}(M') = \vec{E}(M)$ (le vecteur champ électrostatique restent inchangé).

Si la distribution de charges est invariante par toute translation suivant un axe (Oz) alors $\vec{E}(M)$ ne dépend pas de z. $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}(M) = \vec{E}(x,y,z) = \vec{E}(x,y)}$

b) Invariance par rotation

Si une distribution de charges est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'axe Δ et d'angle θ_0 alors pour tout point M et M' = $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$(M), $\vec{E}(M') = \vec{R}_{\Delta,\theta_0}(\vec{E}(M))$ où $\vec{R}_{\Delta,\theta_0}$ est la rotation vectorielle associée à la rotation affine $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$.

Si la distribution de charges est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) alors, en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) les composantes E_r, E_θ et E_z du vecteur champ électrostatique $\vec{E}(M)$ ne dépendent pas de l'angle de θ. $\Rightarrow \boldsymbol{\vec{E}(M) = \vec{E}(r,\theta,z) = \vec{E}(r,z)}$

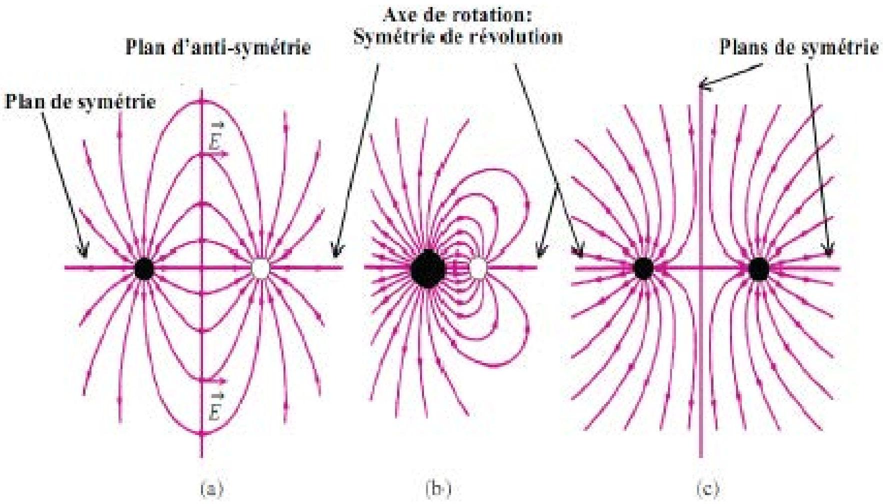
3.3. Exemple d'éléments de symétrie de corps chargés

La figure ci-dessous représente la cartographie du champ électrostatique pour trois systèmes de charges :

(a) : deux charges (+q, -q)

(b) : deux charges (+2q, -q)

(c) : deux charges (+q, +q)



On peut remarquer que tout plan contenant les deux charges est un plan de symétrie : il y a en a une infinité, en particulier le plan de la figure et le plan perpendiculaire à la figure. L'intersection de ces plans de symétrie définit un axe de symétrie de révolution. Dans le cas (a), il existe un plan d'antisymétrie ; le plan médiateur: le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan.

3.4. Récapitulatif

Le champ électrostatique possède les propriétés de symétrie d'un vecteur « vrai » ou vecteur polaire. En particulier :

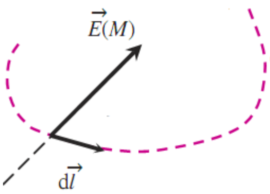
- le champ électrostatique engendré par une distribution de charges invariante par translation ou de révolution autour d'un axe possède les mêmes invariances que celle-ci.

- lorsqu'une distribution de charges possède un plan de symétrie, le champ électrostatique appartient à ce plan en chacun de ses points.
- lorsqu'une distribution de charges possède un plan d'antisymétrie, le champ électrostatique est perpendiculaire à ce plan en chacun de ses points.
- lorsqu'une distribution de charges possède deux plans de symétrie, le champ électrostatique est suivant la droite commune aux deux plans.
- lorsqu'une distribution de charges possède un axe de symétrie, le champ électrostatique est suivant cet axe

4. Circulation du champ électrostatique - Potentiel électrostatique

4.1. Circulation du vecteur champ électrostatique

4.1.1. Circulation élémentaire



La circulation élémentaire δC d'un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$ est par définition :

$$\boxed{d\mathcal{C} = \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}}$$

4.1.2. Circulation le long d'une courbe entre deux points

Soit une courbe quelconque (chemin) (AB). La circulation du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ de A vers B, le long de la courbe (AB) est la grandeur :

$$\boxed{\mathcal{C}_{AB} = \int_{(AB)} d\mathcal{C} = \int_{(AB)} \vec{E}(M).\overrightarrow{dl}}$$

Remarques

1. La définition de la circulation reste valable pour tout champ de vecteur $\vec{A}$
2. En général, la circulation C d'un champ de vecteur $\vec{A}$ dépend du chemin suivi et non uniquement des points de départ et arrivée A et B.
3. Si A = B, la courbe est fermée et est appelée contour. La circulation de $\vec{A}$ s'écrit alors :

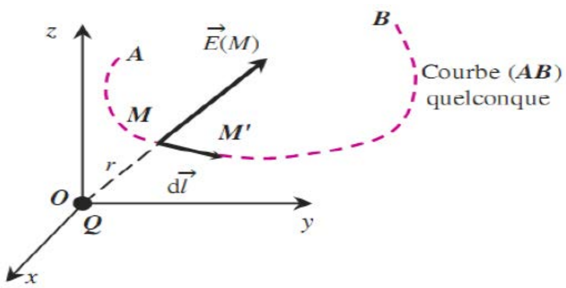
$$\mathcal{C}_{AB} = \oint_{(AB)} \vec{A}(M).\overrightarrow{dl}$$

4.1.3. Circulation du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle

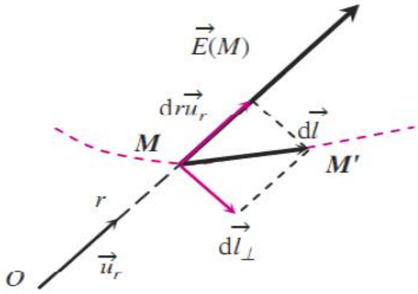
En chaque point M d'une courbe (AB), une charge ponctuelle Q placée en un point O de l'espace créé le champ électrostatique :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r$$

$\vec{u}_r$: vecteur unitaire suivant $OM = r$.



Le déplacement élémentaire $\vec{dl}$ sur (AB) au point M est tel que $\vec{dl} = dr\vec{u}_r + \vec{dl}_\perp$ avec $\vec{dl}_\perp . \vec{u}_r = \vec{0}$.



La circulation élémentaire d$\mathcal{C}$ du champ $\vec{E}(M)$ est :

$$d\mathcal{C} = \vec{E}(M).\vec{dl} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\vec{u}_r.(dr\vec{u}_r + \vec{dl}_\perp) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}$$

$$or \ \frac{dr}{r^2} = d\left(-\frac{1}{r}\right) = -d\left(\frac{1}{r}\right) \Rightarrow d\mathcal{C} = -d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\right)$$

La circulation élémentaire du champ électrostatique est l'opposé de la différentielle de la fonction $Q/4\pi\varepsilon_0 r$.

Entre deux points A et B on a :

$$\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B d\mathcal{C} = \int_A^B -d\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}\right) = -\left[\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]_A^B$$

$$\Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\mathcal{C}_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B}}}$$

La circulation du champ électrostatique ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de la position initiale et finale entre deux points.

Potentiel électrostatique

4.1.4. Définition quantitative

La circulation entre deux points A et B du champ électrostatique ne dépendant que de la position initiale et finale entre ces deux points et non du chemin suivi définit une fonction scalaire d'état V appelée potentiel électrostatique dont la différence de valeurs aux points A et B est égale à cette circulation.

$$\boxed{\boldsymbol{\mathcal{C}_{AB} = \int_A^B \vec{E}(M).\vec{dl} = V(A) - V(B)}}$$

4.1.5.Potentiel électrostatique crée par une charge ponctuelle

Pour une charge ponctuelle la circulation du champ électrostatique entre A et B est :

$$\mathcal{C}_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_A} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_B} = V(A) - V(B)$$

Le potentiel électrostatique créé par la charge Q au point M à la distance r de Q est donc :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + cte}}$$

Par convention on choisit le potentiel nul à une distance infiniment loin de la charge, la constante est donc nulle : $\boldsymbol{V(\infty) = cte = 0}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{V(M) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

Le potentiel V s'exprime en Volt (V) et le module du champ électrostatique en V.m^{-1}.

4.2. Relation entre champ et potentiel électrostatique

4.2.1. Relation différentielle

$$d\mathcal{C} = \vec{E}(M).\vec{dl} = -dV \Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{dV(M) = -\vec{E}(M).\vec{dl}}}$$

4.2.2.Relation locale

Par définition de la différentielle : $dV = \overrightarrow{grad}V.\vec{dl} = -\vec{E}(M).\vec{dl}$ d'où:

$$\boxed{\boldsymbol{\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V(M)}}$$

On dit que le champ électrostatique dérive du potentiel électrostatique.

En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\vec{E}(M) = -\left(\frac{\partial V(M)}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial V(M)}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial V(M)}{\partial z}\vec{u}_z\right)$$

4.2.3.Relation intégrale

La circulation du champ électrostatique entre deux points M et N est:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{MN} = \int_M^N \vec{E}.\vec{dl} = V(M) - V(N)}$$

Elle définit la différence de potentiel (ddp) ou tension électrique entre M et N.

Si M = N alors :

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_{MN} = \oint_C \vec{E}.\vec{dl} = V(M) - V(N) = 0}$$

La circulation du champ électrostatique sur un contour fermé est nulle. On dit que **le champ électrostatique est à circulation conservative.**

4.3. Potentiel électrostatique créé par une distribution de charge

4.3.1. Potentiel électrostatique créé par une répartition de charges ponctuelles

Soit un ensemble de N charges ponctuelles $\{q_i\}_{i=1,N}$ placées respectivement aux points $\{A_i\}_{i=1,N}$. Par application du principe de superposition on a :

$$dV = -\vec{E}.\vec{dl} = -\left(\sum_{i=1}^{N}\vec{E}_i\right).\vec{dl} = -\sum_{i=1}^{N}(\vec{E}_i.\vec{dl}) = \sum_{i=1}^{N} dV_i = d\left(\sum_{i=1}^{N} V_i\right)$$

D'où $$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \sum_{i=1}^{N} V_i(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{A_iM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{r_i}}}$$

4.3.2. Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

a) Distribution volumique

Distribution de charges contenue dans un volume $\mathcal{V}$ de densité volumique de charge ρ(P). Le volume élémentaire d$\mathcal{V}$ contenant la charge $dq = \rho(P)d\mathcal{V}$ (considérée comme ponctuelle) crée en un point M de l'espace le potentiel électrostatique :

$$dV(M) = \frac{\rho(P)d\mathcal{V}}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{où} \quad r = \|\overrightarrow{PM}\|$$

Le potentiel électrostatique créé au point M par toute la distribution volumique de charges est donc :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{(\mathcal{V})}\frac{\rho(P)}{r}d\mathcal{V}}}$$

b) Distribution surfacique

De même la distribution de charges sur une surface d'aire S de densité surfacique de charge σ(P) crée en point M de l'espace le potentiel électrostatique :

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_{(S)}\frac{\sigma(P)}{r}dS}}$$

c) Distribution linéique

Pour une distribution linéique de charges de densité linéique λ(P) sur une longueur L, le potentiel électrostatique résultant au point M est donc::

$$\boxed{\boldsymbol{V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{(L)}\frac{\lambda(P)}{r}dl}}$$

4.4. Propriétés de symétrie du potentiel électrostatique

- **Symétrie plane :**

Si une distribution de charges est symétrique par rapport au plan (π) alors :

pour tout oint M et M' = S_π(M), V(M') = V(M)

- **Antisymétrie plane** :

Si une distribution de charges est antisymétrique par rapport au plan (π_a) alors :

pour tout point M et M' = $S_{\pi a}$(M), V(M') = −V(M)

(valable si le potentiel est pris nul à l'infini, cas de distribution de charges d'extension finie)

➢ Si le point M est dans le plan d'antisymétrie, il se confond avec son symétrique M' d'où pour M ∈ (π_a) ⟹ V(M) = − V(M') = −V(M) ⟹ V(M) = 0.

Le potentiel est nul dans un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges.

- **Invariance par translation**

Si une distribution de charges est invariante par la translation $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ de vecteur $\vec{a}$ alors :

pour tout point M et M' = $\mathcal{T}_{\vec{a}}$(M), $V(M') = V(M)$ (le potentiel électrostatique restent inchangé).

Si la distribution de charges est invariante par toute translation suivant un axe (Oz) alors $V(M)$ ne dépend pas de z. ⇒ $\boldsymbol{V(M) = V(x,y,z) = V(x,y)}$

- **Invariance par rotation**

Si une distribution de charges est invariante par la rotation $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$ d'axe Δ et d'angle θ_0 alors : pour tout point M et M' = $\mathcal{R}_{\Delta,\theta_0}$(M), $V(M') = V(M)$

Si la distribution de charges est invariante par toute rotation autour de l'axe (Oz) alors le potentiel électrostatique $V(M)$ ne dépend pas de l'angle de θ. ⇒ $\boldsymbol{V(M) = V(r,\theta,z) = V(r,z)}$

5. Energie potentiel électrostatique d'une charge placée dans un champ électrostatique extérieur

5.1. Travail d'une force électrostatique

Une charge ponctuelle q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ est soumise à la force électrostatique au point M: $\vec{f} = q\vec{E}(M)$

$$d'où \quad dW = \vec{f}.\overrightarrow{dl} = q\vec{E}(M).\overrightarrow{dl}$$

Lorsque la charge q se déplace d'un point A à un point B, le travail de cette force est :

$$W_{A\to B} = \int_A^B q\vec{E}.\overrightarrow{dl} = -q\int_A^B dV = q\big(V(A) - V(B)\big) \Rightarrow$$

$$\boxed{\boldsymbol{W_{A\to B} = qV(A) - qV(B)}}$$

Le travail de cette force est fonction de la ddp et donc indépendant du chemin suivi. La force électrostatique est une force conservative.

5.2. Energie potentielle de la charge q

La force électrostatique étant une force conservative, elle dérive d'une énergie potentielle E_{p_e} telle que $dW = -\mathrm{d}E_{P_e}$.

Pour un déplacement de A vers B :

$$W_{A\to B} = -\Delta E_{P_e} \Longrightarrow qV(A) - qV(B) = E_{P_e}(A) - E_{P_e}(B)$$

D'où l'énergie potentielle d'une charge q placée en un point M où règne un champ électrostatique dérivant du potentiel électrostatique V est :

$$\boxed{\boldsymbol{E_{P_e}(M) = qV(M)}}$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{E_{P_e}(M)}{q} \quad \text{donne une signification physique du potentiel:}$$

Le potentiel électrostatique est une énergie potentielle par unité de charge.

La charge q subit la force électrostatique au point M:

$$\vec{f} = q\vec{E}(M) = -q\overrightarrow{grad}V(M) = -\overrightarrow{grad}\big(qV(M)\big)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\boldsymbol{\vec{f} = -\overrightarrow{grad}E_{P_e}(M)}}$$